

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на первый курс

1. ③ Вычислить неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{1 + \sin(2x) - \cos(2x)}.$$

2. ④ Доказать сходимость числовой последовательности

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{11}{10} + \frac{1}{x_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и вычислить её предел.

3. ④ Найти общее уравнение плоскости, проходящую через прямолинейные образующие поверхности

$$P = \{ (x, y, z) : x = y^2 - z^2 \},$$

пересекающиеся в точке с координатами $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. Система координат декартова прямоугольная.

4. ④ Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\operatorname{arcctg}(-x)}{2 \operatorname{arctg}(x)} \right)^x.$$

5. ⑤ При фиксированном параметре $a > 0$ построить график функции

$$y = x \sqrt[3]{1 - \frac{a}{|x|}},$$

вычислив её асимптоты, первую и вторую производные, указав локальные экстремумы, промежутки возрастания и убывания, промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

ОТВЕТЫ И ИНСТРУКЦИЯ ПО ПРОВЕРКЕ

для поступающих на первый курс

1.③ Вычислить неопределённый интеграл

$$\int \frac{dx}{1 + \sin(2x) - \cos(2x)}.$$

Ответ: $-\ln \sqrt{|1 + \operatorname{ctg} x|} + C$.

Инструкция: Потеря произвольной постоянной — снять 1 очко.

2.④ Доказать сходимость числовой последовательности

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{11}{10} + \frac{1}{x_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и вычислить её предел.

Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{2}$.

Инструкция: Показано, что, если предел последовательности существует, то он равен $\frac{3}{2}$ — 1 очко.

Показано, что

$$|x_{n+1} - \frac{3}{2}| \leq \frac{2}{5} |x_n - \frac{3}{2}| \quad - 2 \text{ очко.}$$

Как следствие получено, что

$$|x_n - \frac{3}{2}| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \frac{3}{2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad - 1 \text{ очко.}$$

3.④ Найти общее уравнение плоскости, проходящую через прямолинейные образующие поверхности

$$P = \{ (x, y, z) : x = y^2 - z^2 \},$$

пересекающиеся в точке с координатами $x = 3, y = 2, z = 1$. Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $x - 4y + 2z + 3 = 0$. Направляющие векторы образующих $(2, 1, 1)$ и $(6, 1, -1)$.

Инструкция: Найден направляющий вектор одной из двух образующих P , проходящей через заданную точку — 1 очко.

Найдена нормаль к искомой плоскости — 1 очко.

4.④ Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg}(-x)}{2 \operatorname{arctg}(x)} \right)^x.$$

Ответ: $\exp\left(\frac{1}{\pi}\right)$. $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $\operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Инструкция: Функция $\operatorname{arctg}(-x)$ или $\operatorname{arctg}(x)$ разложена при $x \rightarrow +\infty$ до $o\left(\frac{1}{x}\right)$ — 1 очко.

Функция $\frac{\operatorname{arctg}(-x)}{2\operatorname{arctg}(x)}$ разложена при $x \rightarrow +\infty$ до $o\left(\frac{1}{x}\right)$ — 1 очко.

5. (5) При фиксированном параметре $a > 0$ построить график функции

$$y = x \sqrt[3]{1 - \frac{a}{|x|}},$$

вычислив её асимптоты, первую и вторую производные, указав локальные экстремумы, промежутки возрастания и убывания, промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

Ответ: Асимптоты $y = x - \frac{a}{3}$ при $x \rightarrow +\infty$ и $y = x + \frac{a}{3}$ при $x \rightarrow -\infty$.

$$y'(x) = \left(1 - \frac{a}{|x|}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{2a}{3|x|}\right),$$

$x = \frac{2a}{3}$ — локальный минимум, $x = -\frac{2a}{3}$ — локальный максимум,

функция возрастает на $(-\infty, -\frac{2a}{3})$ и на $(\frac{2a}{3}, +\infty)$,

функция убывает на $(-\frac{2a}{3}, 0)$ и на $(0, \frac{2a}{3})$,

$$y''(x) = -\frac{2a^2}{9x^3} \left(1 - \frac{a}{|x|}\right)^{-\frac{5}{3}},$$

$x = \pm a$ — точки перегиба с вертикальной касательной,

функция выпукла вверх на $(-a, 0)$ и на $(a, +\infty)$,

функция выпукла вниз на $(-\infty, -a)$ и на $(0, a)$.

Инструкция: Найдены асимптоты — 1 очко.

Найдена первая производная — 1 очко.

Найдены локальные экстремумы и указаны промежутки возрастания и убывания — 1 очко.

Найдена вторая производная — 1 очко.

Найдены точки перегиба и указаны промежутки выпуклости вверх и вниз — 1 очко.

ОЧКИ	ОЦЕНКА
0–2	НЕУД. (1)
3–4	НЕУД. (2)
5–6	УДОВЛ. (3)
7–8	УДОВЛ. (4)
9–10	ХОР. (5)
11–12	ХОР. (6)
13–14	ХОР. (7)
15–16	ОТЛ. (8)
17–18	ОТЛ. (9)
19–20	ОТЛ. (10)